Lycée pilote de Tunis	**DEVOIR DE SYNTHÈSE 2**	Troisième maths 6-7-8
Mme Bali & Mrs Ben Regaya et Gharbi	Durée 3h	Le 05 /03/2013

Exercice1 (2 points) << Q.C.M >>

Une ou plusieurs réponses sont correctes, les déterminer dans chaque cas.

1. On pose $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

   a) $\bar{t} = \frac{1}{t}$; b) $arg\left(\frac{t}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}\right) \equiv -\frac{7\pi}{12}[2\pi]$; c) t^{4n} est réel si n est entier.

2. Soit z un nombre complexe de module 1 alors

   a) $\frac{i\bar{z}-1}{z-i} = -\bar{z}$ b) $\frac{i\bar{z}-1}{z-i}$ est réel c) $\left|\frac{i\bar{z}-1}{z-i}\right| = 1$

3. Le chiffre de droite de l'écriture décimale de l'entier $A = \sum_{k=1}^{10} k^{100}$ est :

   a) 0 b) 1 c) 3

Exercice2 (4 points)

Soit un carré $ABCD$ de sens direct et O son centre. On considère un point M de $[AD]$ et un point N de $[AB]$ tels que $AM=BN$. Les droites (BM) et (DN) se coupent en G.

1. Démontrer que $r_{(O,\frac{\pi}{2})}(M) = N$.
2. a) Montrer que les droites (CM) et (DN) sont perpendiculaires

   b) Montrer alors que G est l'orthocentre du triangle CMN.
3. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au carré $ABCD$. On note H le symétrique de O par rapport à A. Le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre A et passant par O coupe $(\mathcal{C})$ en I et J. (prendre I sur l'arc $\widehat{AB}$).

   Soit R' la rotation de centre I et d'angle $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   a) Montrer que $R(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}')$.
   b) Déterminer $R'(J)$ et montrer que $R'(C) = J$
   c) Soit D' l'image de D par R'. Montrer que $D' \in (DJ)$.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixes z vérifiant ; $z - i\bar{z} = 0$.
2. A tout point M d'affixe $z = x+iy$ (x et y désignant des nombres réel distincts), on associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{z+\bar{z}-i}{z-i\bar{z}}$.

   a) Déterminer le module et un argument de $f(i)$ et en déduire que $[f(i)]^8$ est un réel positif.

   b) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z) = i$.
3. Déterminer l'ensemble (δ) des points M d'affixes z tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 4 (4 points)

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.
2. On définit, pour $n \geq 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}$.

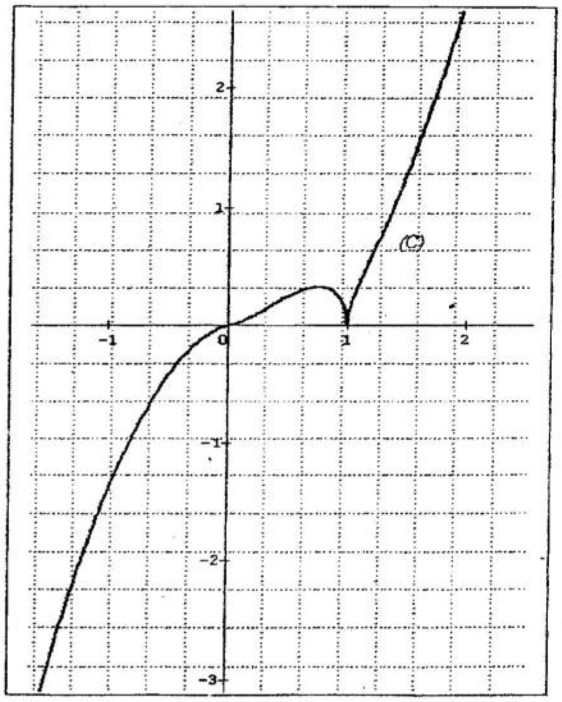
   a) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$. En déduire que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puis un majorant de u_n. Que peut-on en conclure pour (u_n) ?

3. On définit pour $n \geq 1$ la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que (v_n) est décroissante. Quelle est la limite de $(v_n - u_n)$? Que peut-on en conclure pour (v_n) ?

Exercice 5 (6 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x - x^2|}$. On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1. Quelle conséquence pour la courbe de f ?
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Ci-contre on a construit la courbe (C) de f.

   a) reproduire sur votre copie la courbe (C) et construire les tangentes ou les demis tangentes manquantes.

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n\sqrt{x - x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1.
2. a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0,1[$ et que

$$g_n'(x) = \frac{x^n\left(n + \frac{1}{2} - (n+1)x\right)}{\sqrt{x - x^2}}, \quad x \in]0,1[.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.

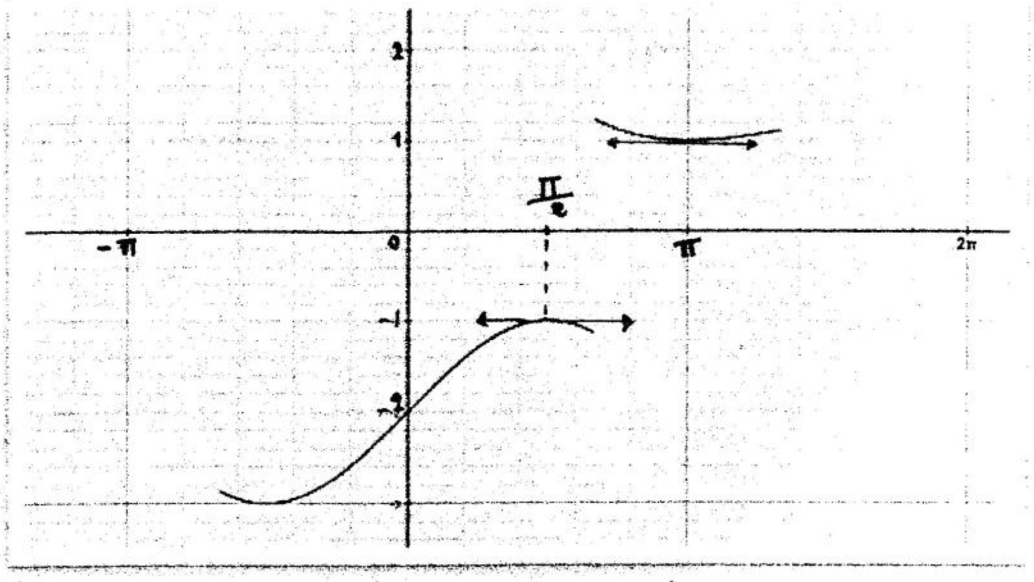
   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.

   b) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Lycée pilote de Tunis	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Le 05/ 03/ 2013
	MATHEMATIQUES	
Mme KANOUN ZID	$3^{ème}$ Math 1	Durée 3H

xercice 1 : (3 points)

a courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par



$$\begin{cases} f(x) = sinx - 2 & si\ x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right] \\ f(x) = 1 + \dfrac{1 + cosx}{x} & si\ x \in \left]\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right[\end{cases}$$

La tangente à la courbe au point d'abscisse zéro passe par le point A(2,0)

1) a) Déterminer graphiquement : $f(\frac{\pi}{2})$, $f(0)$ et $f(\pi)$.

b) Déterminer graphiquement : $f'(\frac{\pi}{2})$, $f'(0)$ et $f'(\pi)$.

2) Retrouver les résultats de b) à l'aide du calcul

xercice 2 :(3 points)

On lance trois fois de suite un dé à 6 faces bien équilibré. On note (x ;y ;z) le triplet ainsi obtenu.

1- Combien y a-t-il d'issues possibles ?

2- Déterminez les probabilités des événements :

- A : « x=y=z » ; B : « x,y et z sont deux à deux distincts » ; C : « x+y+z=3 » ; D : « x=1 »
- $A \cap D$; $B \cap C$; $A \cup D$

xercice 3 :(4 points)

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant x < y.
S est l'ensemble des couples (x ;y) tels que PGCD (x ;y)=y - x

1) a) Calculer PGCD (363 ;484)

b) le couple (363 ;484)appartient-il à S ?

2) soit n un entier naturel non nul

Montrer que PGCD (n,n+1)=1

Le couple (n,n+1) appartient-il à S ?

3) a)Montrer que (x,y) appartient à S si et seulement s il existe un entier k non nul tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

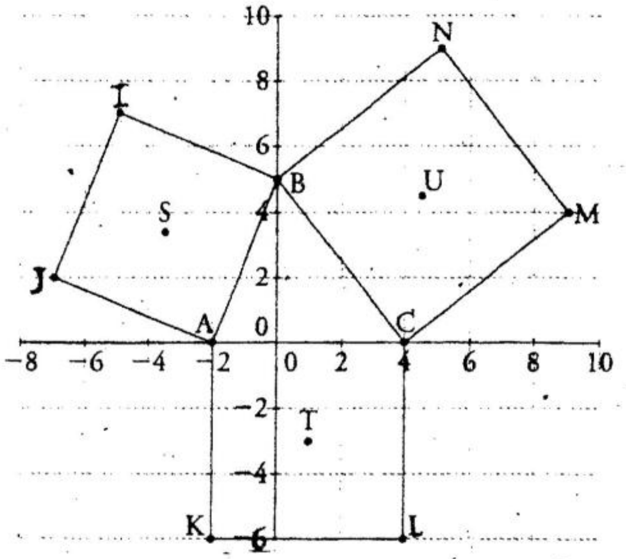
b) En déduire que si $(x,y) \in S$ alors PPCM $(x,y)=k.(k+1).(y-x)$

4) a) Déterminer les entiers naturels diviseurs de 228

en déduire l'ensemble des couples (x,y) de S tèls que PPCM $(x,y)=228$.

Exercice 4:(5 points)

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-2$, $b=5i$ et $c=4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.
La figure est donnée ci-dessous.



1) On désigne par j l'affixe du point J, on pose $Z=\frac{b-a}{j-a}$

a) Déterminer graphiquement un argument de Z

b) Montrer que $|Z|=1$

c) Montrer que $Z=i$ et en déduire que J a pour affixe $-7+2i$

2) On admettra que l'affixe du point K est $-2-6i$

a) Calculer BK et JC

b) Montrer que (BK) et (JC) sont perpendiculaires

3) a) Calculer les affixes des points S et T

b) Montrer que U a pour affixe $\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i$

4) On suppose que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v=-0752+0,864\,i$

Montrer que A, V et U sont alignés.

Exercice 5:(points)

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

1) Déterminer les ensembles de définitions des fonctions f et g

2) Calculer les limites aux bornes de leur ensemble de définition

3) a) Etudier la dérivabilité et f et de g en zéro

b) Montrer que pour tout réel x strictement positive on a $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}.(x+1)^2}$

et pour tout réel strictement positif et distinct de 1 on a $g'(x)=\frac{-1-x}{2\sqrt{x}.(x-1)^2}$

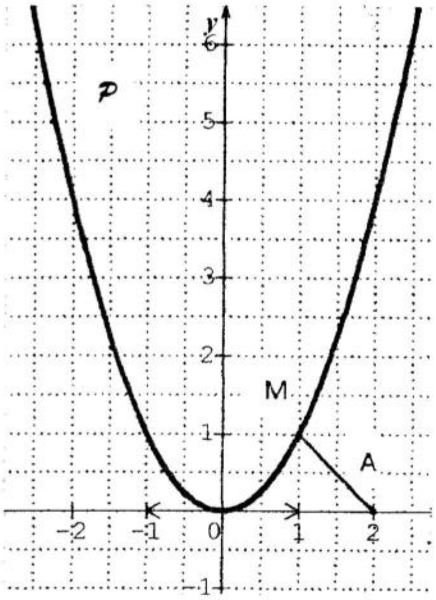
4) a) Montrer que pour tout réel x positif et distinct de 1 on a $f(x)-g(x)=\frac{-2}{x-1}.\sqrt{x}$

b) Déduire la position respective de Cf et Cg

c) Dresser les tableaux de variation de f et g.

5) Tracer Cf et Cg dans un même repère.

LYCEE PILOTE DE GABES Prof :M' Jouou Louey	EPREUVE DE MATHEMATIQUES (05/03/2013) **Durée :180 mn	Classes : 3ème Math 2 & 3 DEVOIR DE SYNTHESE N°2



Exercice n° : 1 (4 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées (2 , 0).

Le but de l'exercice est de trouver M sur $\mathcal{P}$ tel que la distance AM soit **minimale** .

1-/On note **x** l'abscisse d'un point M de $\mathcal{P}$.

Vérifier que **AM** = $\sqrt{x^4 + x^2 - 4x + 4}$.

2-/soit **f** la fonction définie sur IR par **f(x)= 2 $x^3 + x - 2$.**

a-) Dresser le tableau de variation de **f** , puis donner **f(IR).**

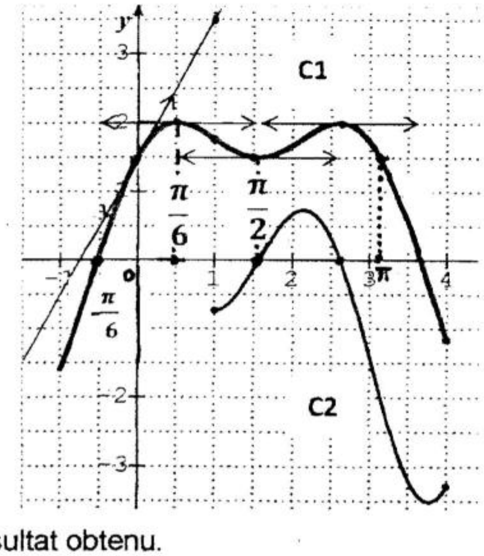
b-) Sachant que **f** s'annule une et une seule fois en un réel α Prouver, a l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que **$0 < \alpha < 1$.**

c-) Donner ,alors ,le signe de **f(x).**

3-/a-) Etudier les variations de la fonction **d** qui à **x** de **IR** associe la distance **AM.**

b-)Démontrer ,alors que le problème de possède une unique solution **M_0** à préciser.

c-)Démontrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en **M_0** est perpendiculaire à la droite **(AM_0).**



Exercice n° : 2 (5 points)

Ci-contre, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, deux portions **C1 et C2** des tracés d'une fonction **f** et de sa fonction dérivée **f '** définies et dérivables sur **IR.**

1-/Justifier que **C1** est la portion du tracé de **f.**

2-/Par lecture graphique , Déterminer **f '(0) ; f (0)** et **f '($\frac{\pi}{6}$).**

3-/On suppose qu'il existe **a , b et c** trois constantes réelles tels que , pour tout **x** de **IR** ; **f(x) = a $\cos^2$ x + b sin x + c.**

a-) Pour **x** de **IR**, Calculer **f '(x)** en fonction de **a , b et c**

b-) En déduire que **a = 2 = b et que c = - $\frac{1}{2}$**

4-/Dans la suite, on prendra **f(x) = 2 $\cos^2$ x + 2 sin x - $\frac{1}{2}$.**

a-) Calculer **f (π - x).**puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b-) Justifier que l'on peut restreindre l'étude de **f** à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c-) Dresser le tableau de variations de **f** sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d-) Utiliser le tracé **C1** de la **feuille à rendre** jointe avec le présent sujet pour compléter le tracé de la restriction de **f** à $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

e-) Discuter ,suivant le paramètre **m** le nombre de solutions de l'équation

4 $\cos^2$ |x | + 4 sin |x | - 1 – m = 0 de $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

5-/Montrer que la fonction **g** définie par **g(x) =** $\frac{2\cos^2 x + 2\sin x - 2}{2x - \pi}$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice n° : 3 (4 points)

1-/On donne dans IN x IN ; l'équation (E) $12x - 7y = 3$.

a-)Montrer que si **(x,y)** est une solution de (E) alors **y** est un multiple de **3** .

b-)Vérifier que **(2,3)** est une solution particulière de (E),puis achever la résolution de **(E)**

2-/Soit **k** un entier naturel non nul .On pose $a = 3k+1$, $b= 5k-2$ et $d= a \wedge b$

a-) Montrer que $(3k+1) \wedge (5k-2) = (k+4) \wedge 11$.En déduire les valeurs possible de **d**.

b-)Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si **k-7** n'est pas un multiple de **11**.

c-)Montrer que pour tout u et v de IN* et si $u \wedge v = 1$ alors $u^n \wedge v^n = 1$, n de IN*.

d-) Déterminer $3001^m \vee 4998^m$

3-/a-) Au moyen du **petit théorème de Fermat** ,montrer que pour tout **t** de IN, $t^5 - t$ est divisible par **10**.

b-) En déduire que pour tout **n** de IN*, les entiers t^n et t^{n+4} ont le même chiffres d'unités.

c-) Quel est le chiffre des unités de 2013^{2013}.

Exercice n° : 4 (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I-/-)On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre **O** et de rayon **1** et par **A** et **I** les points d'affixes respectives **1** et $\sqrt{3} + i$.

1-/a-)Ecrire $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique

b-)Construire le point A.

2-/Soit B le point d'affixe $b= \frac{a-1}{1-\bar{a}}$

a-)Montrer que B est un point de $\mathscr{C}$.

b-)Montrer que $\frac{b-1}{1-a}$ est un réel ,

c-) En déduire que les points A,B et I sont alignés.

d-)Construire le point B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3-/Soit θ un argument du nombre complexe **b**. Montrer que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$

II-/-)Soit **z** un nombre complexe <u>non réel</u>. On désigne par **K, M et N** les points d'affixes respectives -1 , z et z^2.

1-/ Justifier que les points O,K et M sont non alignés.

2-/Montrer que OMKN est un parallélogramme si et seulement si $(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$

3-/Montrer que les parallélogrammes solutions de ce problème sont des losanges.

III-/-)Dans la figure ci-dessous ;EFG est un triangle.On a construit extérieurement au triangle les carrées directs **EGRS** , **FEPQ** puis le parallélogramme **PESD**.

On désigne par **e, f , g , s** et **p** les affixes respectives de **E,F,G,S** et **P** .

Le but de cette question est de montrer que (ED)est une hauteur du triangle EFG et que ED=FG .

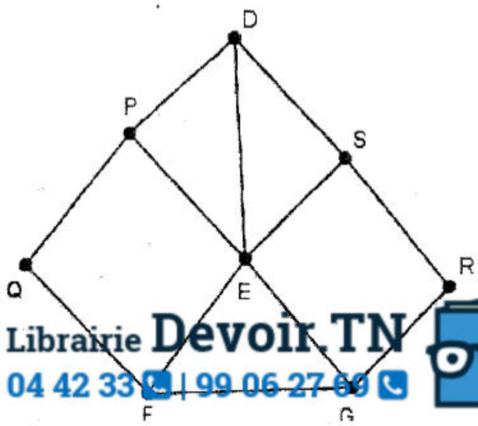
1-/a-)Prouver que $\left|\frac{s-e}{g-e}\right| = 1$ et que $\arg\left(\frac{s-e}{g-e}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

b-)En déduire que $s = i(g-e) + e$.

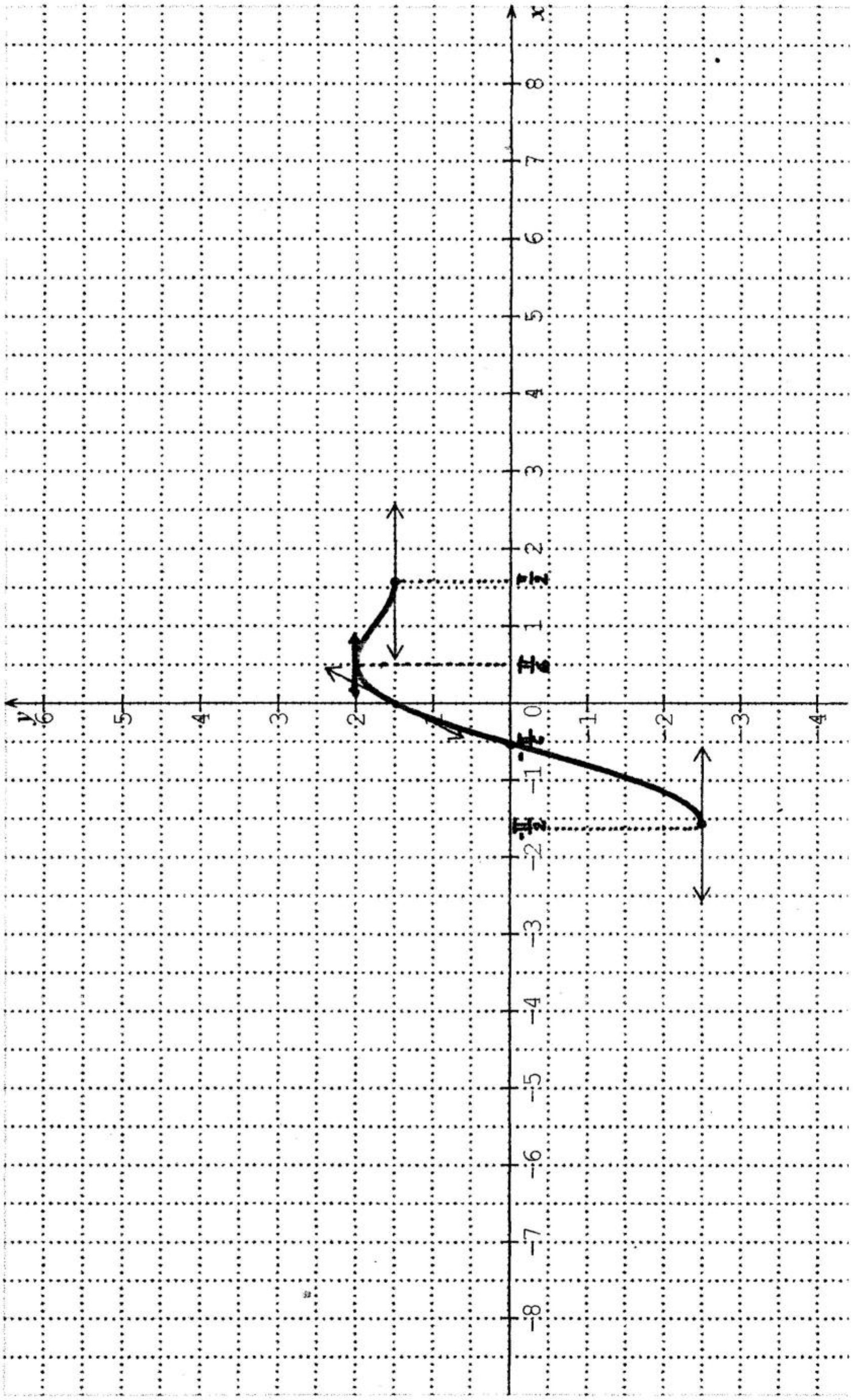
2-/Montrer que $p = -i(f-e) + e$.

3-/Calculer l'affixe de $\overrightarrow{ED}$ et celle de $\overrightarrow{FG}$.

4-/Conclure



<u>FEUILLE A RENDRE</u>



Lycée pilote de Nabeul	Profs. Kouch . Gastli . Laataoui . Ben Brahim . Felfel		
	Devoir de Synthèse N°2		
Mars 201 3	Classes : 3ème Maths	MATHEMATIQUES	Durée : 3 h

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux**, en justifiant les réponses.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1/ Soit z = $1+\cos\frac{41\pi}{13}+\sin\frac{41\pi}{13}$ alors $\arg(z)\equiv\frac{41\pi}{26}[2\pi]$

2/ Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b distinctes et non nulles

Si $\arg(3ia)+\arg 2\bar{b}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors les points O ,A et B sont alignés

3/ Si z est un nombre complexe de module 1 alors le nombre : $\left(\dfrac{z-\frac{1}{z}}{z+\bar{z}}\right)^2$ est un réel négatif

4/ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin 3n}{n}=3$

Exercice 2 : (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ Montrer que la droite d'équation : x = 1 est un axe de symétrie de C

2/ a) Etudier les variations de f sur $[1,+\infty[$

b) Montrer que la droite Δ d'équation : $y=x-1$ est une asymptote à C en $+\infty$. Tracer C.

c) En déduire le tracé de la courbe représentative C' de $-f$

3/ Montrer que l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $\left|z-\bar{z}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}\left|z-(1+i\sqrt{2})\right|$

est la réunion de deux courbes qu'on précisera.

Exercice 3 : (4,5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Soient M , N , P et Q des points du plan complexe tels que $M\neq N$ et $P\neq Q$.

Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_Q-z_P}{z_N-z_M}\right)[2\pi]$

2) On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A=\sqrt{3}+2i$.

a) Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b) On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B=-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$. Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c) Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) On considère les points E et F tels que : $\overline{AE} = \overline{IB}$ et $\overline{AF} = \overline{BI}$.

Montrer que $\frac{z_E - z_C}{z_F - z_B} = i$. En déduire que (CE) $\perp$ (BF) et que CE = BF.

Exercice 4 : (4,5 points)

On donne la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 + U_n^2} \quad (n \in IN) \end{cases}$

1/ a) Montrer que la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x}{2+x^2}$ est croissante sur $[0,1]$

b) Montrer alors que pour tout entier naturel n : $U_n \in]0,1]$

c) Montrer que la suite U est décroissante.

2/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $|U_{n+1}| \leq \dfrac{|U_n|}{2}$,

b) En déduire que pour tout $n \in IN$: $|U_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3/ On donne la suite S définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{U_k}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $S_n \geq 2^{n+1} - 1$

b) En déduire que la suite S est divergente

Exercice 5 : (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Etudier f sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ et tracer C_f , on précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses respectives $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$

2/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x}$

a) Vérifier que g est périodique de période 2π

b) Montrer que pour tout réel x : $g(x) = 2\left|\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right|$

c) Tracer C_g la courbe de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{10\pi}{3}\right]$

d) Déterminer à partir du graphique $g'_d(\dfrac{4\pi}{3})$

3/ Soit la fonction h définie sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ par : $h(x) = \dfrac{2 - f(x)}{\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)^2}$.

h est-elle prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{3}$?

Lycée Pilote de Bizerte 03/03/2010	Devoir de synthèse n 1 3 M 2	Prof : Kachouri Imed Durée : 3 heures

Exercice n :1(6pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$; On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. **a)** Montrer qu'il existe trois réels a,b et c tel que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

   b) Etudier les variations de f puis préciser les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$

   c) Construire la courbe $\mathcal{C}$

2. Soit D_m la droite d'équation $y=2x+m$; $m\in\mathbb{R}$

   a) Montrer que pour tout réel m ; D_m coupe $\mathcal{C}$ en deux points M' et M'' distincts.

   b) Déterminer l'ensemble des milieux I_m des segments $[M',M'']$ quand m vari

3. Soit $A(1,-1)$, $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et R' le repère $(A,\vec{u},\vec{j})$

   a) Montrer que $\mathcal{C}$ est la courbe de la fonction $g:x\to\dfrac{4}{x}$ dans le repère R'

   b) Donner relativement à R' une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en un point M_0 d'abscisse x_0

   c) Déterminer les coordonnées des points T et T' intersection de Δ avec $D(A,\vec{u})$ et $D(A,\vec{j})$.Montrer que $M_0=T*T'$

   d) Montrer que $\overline{AT}\cdot\overline{AT'}$ est indépendant de M_0

Exercice n :2(4pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-\dfrac{x^2}{4}+x+1$; On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier la fonction f et représenter sa courbe $\mathcal{C}$
2. Soit m un paramètre réel, on considère les droites D_m d'équations $y=mx+4-3m$

   Prouver que toutes les droites passent par un point fixe que l'on déterminera
3. Soit $F(2,1)$ et D la droite d'équation : $y=3$. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x,y), par M on mène la perpendiculaire à D qui coupe D en H

   a) Montrer que $MF^2-MH^2=x^2-4x+4y-4$

   b) Que se passe-t-il si M est un point de $\mathcal{C}$

   c) Quelle est, dans ce cas, la nature du triangle MFH ?

Exercice n :3(5pts)

1. On se propose de résoudre l'équation (E) : $z^2+iz+1=0$.

   a) Montrer que : $z^2+iz+1=\left(z+\frac{i}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

   b) En déduire les solutions de l'équation (E)

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{2z-i}{iz+1}$

   a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $f(M)=M$ on pourra utiliser la première question.

   b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $|z'|=2$

3. On pose $z-i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'+2i=r'(\cos\theta'+\sin\theta')$

   a) Montrer que $(z'+2i)(z-i)=1$

   b) En déduire r' et θ' en fonction de r et θ

Exercice n :4(3pts)

On donne un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$; On pose $E=A*B$, $F=A*C$, $I=B*C$ et r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1. Déterminer $r(C),r(A)$; En déduire $r(F)$
2. Soit $E'=r(E)$,montrer que $I=F*E'$ et que les droites (EC) et (AE') sont perpendiculaires
3. Le cercle de diamètre $[AC]$ et le cercle de diamètre $[IE]$ se recoupent en K ; On pose $H=r(K)$, montrer que les points A,H et K sont alignés

Exercice n :5(2pts)

Répondre par vrai ou faux sans justifier la réponse :

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels le conjugué de $Z=z_1+iz_2$ est $\overline{Z}=z_1-iz_2$
2. L'équation $z^4+z^2=0$ est équivalente à $z=0$
3. Le module du nombre complexe $\sqrt{3}+i$ est $\sqrt{2}$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; L'équation de le tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 1 est : $y=x-1$

Lycée pilote de Tunis	Devoir de synthèse n°2	05-02-2013
M^{me} Selmène	Durée : 3^{h}	3ème Math$_2$

Exercice 1 : (4 points)

Dans le plan P muni du repère orthonormé R $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne la courbe C représentative d'une fonction f définie sur IR*. (voir fig ci dessous)

La droite $\Delta: y = x - 4$ est une asymptote à C en +∞ et la droite d'équation x = 0 est une asymptote à C.

1-a) Déterminer: $f'(1)$, $f'_d(-1)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$ et $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Donner une approximation affine du réel f(1,004).

2-Soit g la fonction définie sur IR* par $g(x) = x + \sqrt{f(x)}$

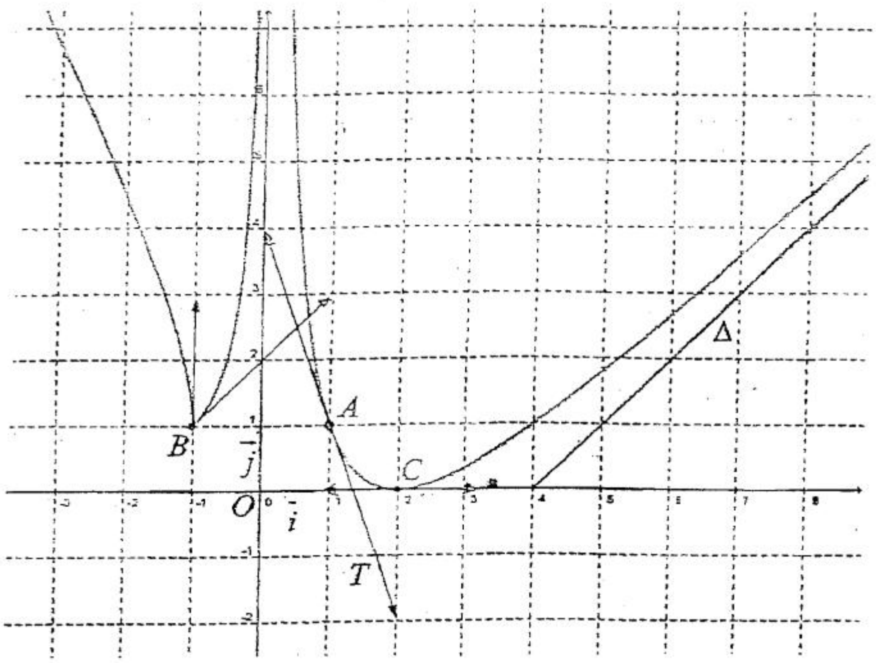
Calculer : $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$.

3-On désigne par u la restriction de la fonction f à]-∞, −1[,on désigne par h la fonction définie sur IR par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 1 \\ u(x-2) & si\ x < 1 \end{cases}, \quad C_h \text{ sa courbe représentative dans le repère R.}$$

a) Tracer la courbe C_h dans le même repère R. b) Dresser le tableau de variation de la fonction h.

(Tout en justifiant)



Exercice 2: (5 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A, B et N d'affixes respectifs $z_A = 2 + 2i\sqrt{3},\ z_B = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_N = z_A + z_B$

1- Ecrire les complexes $z_A\ et\ z_B$ sous la forme trigonométrique, puis placer les points A et B.

2-a) Montrer que le quadrilatère OANB est un carré.

b) Déterminer alors le module et un argument du complexe z_N

c) Déduire les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}\ \ et\ \ sin\frac{7\pi}{12}$.

3-Soient C et D les points d'affixes respectifs $z_C = \bar{z}_B\ \ et\ \ z_D = 4$

a) Placer les points C et D tout en justifiant.

b) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$, en déduire que le triangle OBC est équilatéral.

c) Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

4-a) Déterminer et construire les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ définis par :

$\mathcal{E}$ = { M(z) ∈ P tel que $|z| \leq 4\ et\ \arg(z) \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ } et $\mathcal{F}$ = { M(z) ∈ P tel que $\arg\left(\frac{z}{2+2i\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ }

b) Calculer l'aire le l'ensemble $\mathcal{E}$

Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan complexe P muni du repère orthonormé $R(O,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A, B et C d'affixes

$z_A = -1 + i\ , z_B = -z_A\ et\ \ z_C = 2.$

1-a) Placer les points dans le repère R. b) Montrer que le triangle ABC est rectangle

2-a) Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme A en B et O en C.

b) Déterminer une mesure de son angle.

3-a) Déterminer l'affixe z_E du point E symétrique du point B par rapport à C.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{EC}})$ puis en déduire que R(B) = E

4-On pose I milieu du segment [AE].

Déterminer $R \circ R(A)$ puis déduire que I est le centre de la rotation R.

Exercice 4 : (2 points)

On donne $a = 2^{3n+1} + 1$ et $b = 2^{3n} + 4$

1-a) Montrer par récurrence que : Pour tout entier naturel, $2^{3n} - 1$ est multiple de 7.

b) En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de l'entier a par 7.

2-a) Vérifier que : $2b - a = 7$. b) Déduire que les entiers a et b sont premiers.

Exercice 5 : (4 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = mx^3 + px + q$, on désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1-Trouver les réels m, p et q tels que C_f passe par les points A(0,6), B(2,0) et admet une tangente en A parallèle à la droite D : y = x+1.

2-On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = -x^3 + x + 6$ et $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Montrer que le réel 2 est la seule solution de l'équation f(x)=0.
c) En déduire que pour tout $x \leq 2$ $on\ a$: $f(x) \geq 0$

3-a) Déterminer l'ensemble E_g de définition de la fonction g.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction g à gauche en 2 puis calculer $g'(x)$ $pour$ $x < 2$

c) En déduire les variations de la fonction g.

Lycée pilote Bourguiba
Tunis

3ème Math 3-4-5
5 Mars 2013
Durée : 3 heures
- Mmes :Mili -Gaaloul
Cheikh rouhou

DEVOIR DE SYNTHESE N°2

Exercice n° 1 (4,5 points)

Les parties A,B et C sont indépendantes

A /

Répondre par Vrai ou Faux puis justifier :

1) Si $a \in \mathbb{N}^*$ et $a^6 = 1$ alors a^5-1 est divisible par 6.
2) Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux tel que a> b , a est impair et b est pair alors a+b et a-b sont premiers entre eux.

B /

1) Vérifier que 83 est un nombre premier.
2) Soit x un entier tel que $x^{15} = 83k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
   a/ Montrer que x et 83 sont premiers entre eux.
   b/ Déduire que $x^{82} - 1$ est un multiple de 83.
   c/ Déterminer alors le reste de la division Euclidienne de x^{97} par 83.

C / Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{cases} x\,y = 1008 \\ x \vee y = 168 \end{cases}$$

Exercice n° 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie IR \ {-2} par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que le point A(-2,4) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$
2) Le graphe donné dans la page 3 est la représentation graphique de la restriction de f aux intervalles $[-\sqrt{3} - 2; -2[$ et $[\sqrt{3} - 2; +\infty[$
   Compléter $\mathscr{C}$
3) Soit g la fonction définie par g(x) = f(-|x|)
   a/ Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b/ Etudier la parité de g.
   c/ Déduire dans le même repère $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de g
   puis dresser le tableau de variation de g

Exercice n° 3 (5 points)

Soit R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan . L'unité de longueur 2 cm.

On donne $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère R

1) Déterminer E l'ensemble de définition de f
2) a/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   b/ Dresser le tableau de variation de f.
3) a/ Montrer que la droite Δ d'équation : x = $\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$
   b/ Montrer que la droite D d'équation y = x - $\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de +∞
4) Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère R
5) Soit h la fonction définie par h(x) = $\sqrt{x^2 - x}$
   Soit $\mathscr{C}'$ sa représentation graphique dans le même repère R.
   Déduire $\mathscr{C}'$ à partir de $\mathscr{C}$ et la tracer

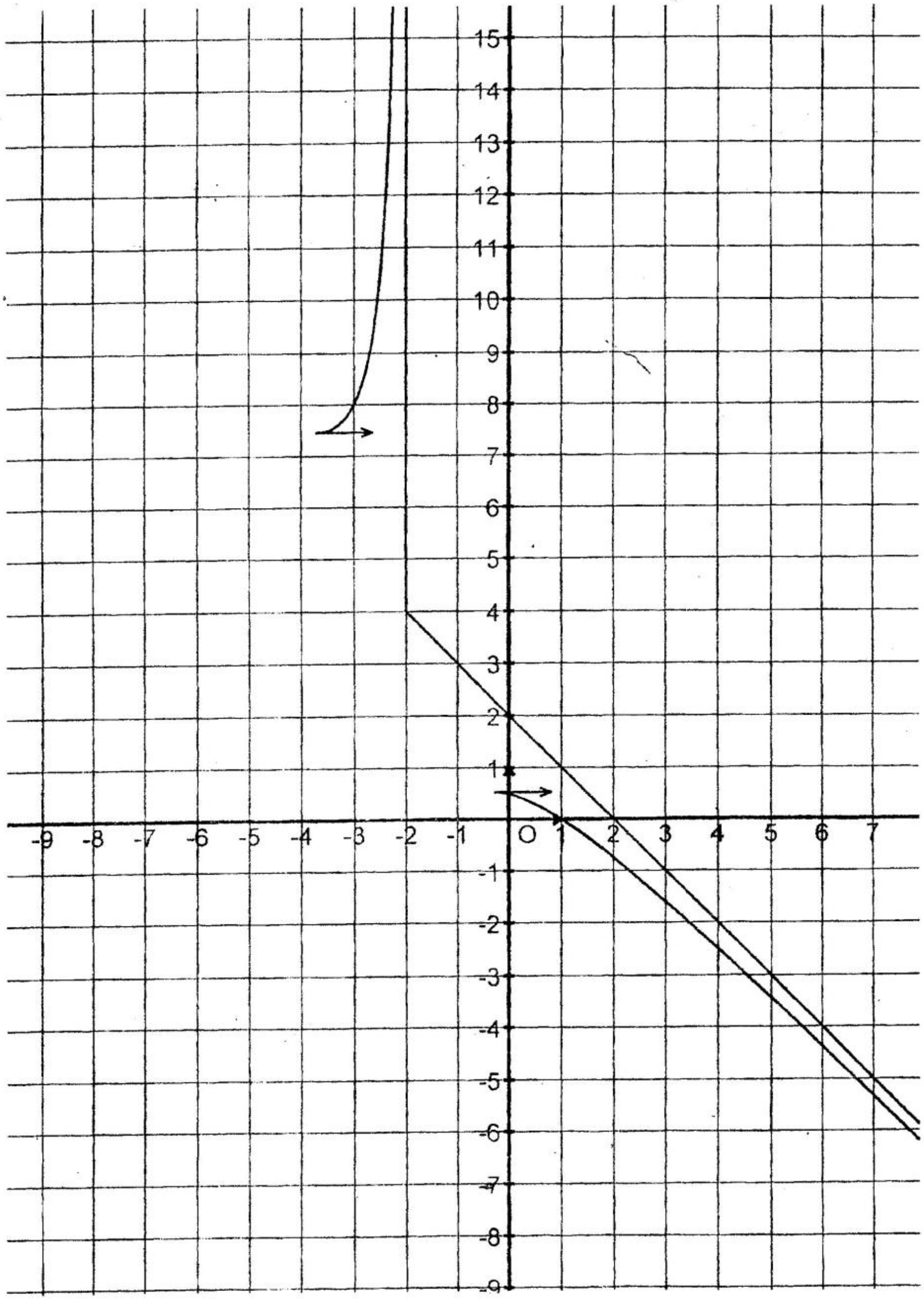
Exercice n° 4 (6.5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

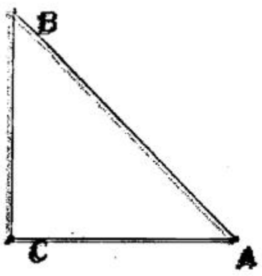
On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le milieu de [BC].

1) a/ Faire une figue (on prendra BC=6cm) et déterminer la nature du triangle OAB
   b/ Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant A en C et B en O.
   c/ Déterminer l'angle de R et montrer que son centre Ω est un point du cercle $\mathscr{C}$
   Construire Ω.
2) Soit E l'image du point A par la rotation R' de centre Ω et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$
   a/ Montrer que C est l'image de E par une rotation de centre Ω dont on précisera l' angle.
   b/ Prouver que le point B est le milieu de [OE]
3) On pose R(C)=D
   a/ Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en C
   b/ Prouver que D= S_{Ω}(E)
4) Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A et *de* Ω. On pose M'= $R_{(A,\frac{\pi}{3})}$(M) et N= $t_{\overrightarrow{AC}}$(M')
   a/ Montrer que AM=CN
   b/ Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$
   c/ En déduire que lorsque M varie, la médiatrice du segment [MN] passe par un point fixe que l'on précisera.

Nom :……………………….…. Prénom : ……………………...N ° : …….. Classe ………



(Annexe 1)



Lycée pilote Sfax Le 01-03-2010	Devoir de synthèse N°2 Durée : 3 heures	$3^{ème}$ Math 1, 2 ,3 et 4 Mrs : Boukhris Megdich et Smaoui

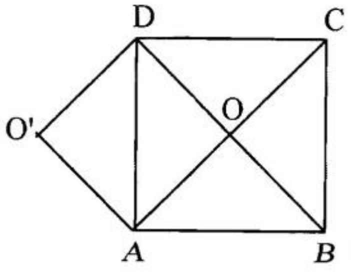
Exercice 1 (4 points)

A) Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci – contre ABCD et AODO'
sont deux carrés de sens direct.



1) L'image de la droite (AB) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est

a) la droite (AD) b) la droite (BC) c) la droite (CD).

2) Le centre de la rotation qui transforme B en D et O en O' est

a) le point B b) le point C c) le point A.

B) Répondre par vrai ou faux en justitifiant la réponse.

1) Si la somme de deux entiers naturels non nuls est un nombre premier alors ces deux nombres sont premiers entre eux.

2) Pour tout entier naturel non nul n, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.

3) Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et paire alors la courbe de la fonction $g : x \mapsto f(1+x)$ dans un repère orthogonal admet un axe de symétrie.

4) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe C_f de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = -x - \frac{4}{x-2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que le point $\Omega(2, -2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2) a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{C}$.

c) Tracer $\mathscr{C}$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x-2}$ et $\mathscr{C}'$ sa courbe dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M′ un point de $\mathscr{C}'$ de même abscisse non nulle x et on désigne par I le milieu du segment $[MM']$.

a) Montrer que le point I appartient à une droite fixe que l'on précisera.

b) En déduire que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = 2$.

c) Tracer alors $\mathscr{C}'$ et déduire les équations de ses asymptotes.

Exercice 3 (5,5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par B.

1) Soit I le symétrique de B par rapport à la droite (AC) et R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ qui transforme C en A.

Montrer que I est le centre de R.

2) Soit D l'image de A par R.

Construire le point D et montrer que A est le milieu de $[BD]$.

3) La droite Δ passant par D et parallèle à (AI) coupe (AC) en E.

a) Montrer que Δ est l'image par R de la droite (AD) et que (AC) est l'image par R de la droite (BC).

b) Montrer que $R(B) = E$.

4) Soit M un point de $[AB]$ distinct de A et B et M′ le point de $[ED]$ tel que $BM = EM'$.

a) Montrer que le triangle IMM′ est équilatéral.

b) Soit R′ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et M″ l'image de M′ par R′.

Montrer que M″ est l'image de M par une translation que l'on précisera.

Exercice 4 (4,5 points)

1)a) Vérifier que pour tout réel x, $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

b) Déterminer les entiers naturels premiers p de la forme $p = k^4 + 4$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Vérifier que 5 divise $n^5 - n$.

b) Montrer que si n est non divisible par 5 alors $n^4 + 4$ est divisible par 5.

3) a) Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.

Montrer que si a divise c, b divise c et $a \wedge b = 1$ alors ab divise c.

b) Soit n un entier naturel non nul non divisible par 3.

Montrer que $n^4 - 1$ est divisible par 3.

4) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(532349)^4$ par 15.